Глава 3. Електрично поле – основни понятия и закони

3.1. Електрически заряди

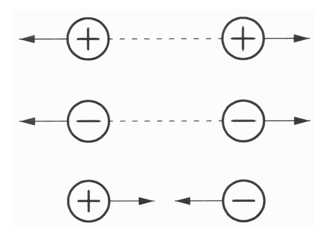
Още от древността е била известно, че някои тела при натриването им с коприна или вълна придобиват особени свойства да привличат леки предмети. Тези свойства са били забелязани от учените в древна Гърция в кехлибара. кехлибар или янтар на гръцки означава електрон. Затова телата, които придобиват такива свойства, са наричани *наелектризирани*. Сега говорим, че телата при това придобиват електрически заряд.

Понятието електричен заряд в електродинамиката е първично, основно понятие.

Електричният заряд q,Q (по-нататък заряд) *е фундаментална физична величина, която характеризира вътрешно, присъщо свойство на заредени частици и се въвежда за количествено характеризиране на способността им да участват в електромагнитните взаимодействия*.

Съвкупността от всички известни експериментални факти позволява да се направят следните изводи:

1. Фундаментално свойство на електричния заряд е съществуването му в две разновидности – *положителен* и *отрицателен.* Установено е, че всички заряди от една разновидност (положителни или отрицателни) взаимно се ***отблъскват***, а зарядите от две разновидности – се ***привличат*** (фиг.3.1).



Фиг.3.1. Взаимодействие между електрични заряди

2. В природата отрицателните и положителните заряди по колическво са равни. Възникването на заредени тела не е обусловено от зараждане на нови заряди, а от тяхното преразпределение.
3. В SI единица мярка за електричен заряд е Кулон $[q]=\mathrm{C}$. Кулон е количеството електричество, протекло през напречното сечение на проводник при неизменна големина на тока от 1A за време 1s. При означаване на капацитета на акумулаторните батерии се употребява извънсистемната единица амперчас ($1\mathrm{Ah}=3600\ \mathrm{C}$).

Единица за електричен заряд е ***кулон*** (C) - електричен заряд, преминаващ през напречното сечение на проводника при големина на тока 1 Ампер за време 1 секунда.

Електрона и протона се явяват съответно носители на елементарен отрицателен и положителен заряд.

4. Минималният положителен заряд е равен на $e^{+}=1{,}6\cdot10^{-19}$ C и се нарича елементарен заряд. Минималния отрицателен заряд е заряда на електрона. Той е равен на елементарния заряд, взет с обратен знак $e^{-}=-1{,}6\cdot10^{-19}$ C.
5. Стойността на заряда има само цели стойности, т.е. всеки заряд q е кратен на елементарния заряд: $q=N\cdot e$, където N е цяло число.
6. ***Закон за съхранение на заряда***: *в електрически изолирана система от заредени тела или частици алгебричната сума на зарядите остава непроменена при какви да са процеси, извършвани с тези тела.* Затворена

$$q_1+q_2+\ldots+q_n=\sum_{i=1}^{n}q_i=\mathrm{const}$$

система от тела означава, че тези тела могат да обменят заряди само помежду си, но не и с други обекти, външни по отношение на дадената система.

7. Заряда е инвариантен спрямо отчетните координатни системи, т.е. неговата стойност не зависи от системата на отчитане.

В електротехниката се работи с точков заряд. ***Точковия заряд*** е условна величина, която се въвежда за да се опрости описанието на електричаското поле на заредено тяло или система от тела. Иначе казано се определя като заредена материална точка. И още точковият заряд е такъв заряд на който носителя има размери пренебрежимо малки в сравнение с разстоянието на взаимодействие.

При разглеждане на макросокопически тела, които се състоят от огромен брой атоми, дискретността на електрическите заряди може да се пренебрегне и тялото да се разглежда като непрекъснато заредено. Може да се разгледат следните видове непрекъснато заредени тела.

1. *Заредена линия* (фиг.3.2,*а*). Разпределението на електрическия заряд на такава линия (нишка) може да се охарактеризира, задавайки във всяка точка на линията заряд на единица от нейната дължина, който се нарича линейна плътност γ на електрическия заряд. Около точка М на линията

$$\gamma(M) = \frac{\Delta q}{\Delta l}. \qquad (3.1)$$

Електрическия заряд на цялата линия може да се намери като се сумира линейната плътност на заряда по цялата линия.

$$q = \sum \gamma(M)\Delta l. \qquad (3.2)$$

За равномерно заредена линия ($\gamma = \text{const}$) (1.1) и (1.2) се дават с формулите

$$\gamma = \frac{q}{l} \text{ и } q = \gamma l, \qquad (3.3)$$

където l е дължина на отделения участък от линията на който се намира електрическия заряд q.

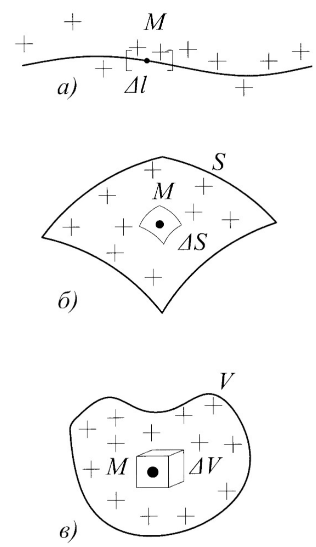
2. *Заредена повърхност* (фиг.3.2,*б*). Разпределението на електрически заряд по повърхност с площ S може да се опише, задавайки във всяка точка М от тази повърхност повърхностната плътност на електрическия заряд

$$\sigma(M) = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \qquad (3.4)$$

Като знаем повърхностната плътност на електрическия заряд, можем да определим електрическия заряд на повърхността: $\Delta q = \sigma(M)\Delta S$

Или като сумираме за цялата повърхност

$$q = \sum \sigma(M)\Delta S. \qquad (3.5)$$



Фиг.3.2. Заредени тела с различна форма: *а*-линия; *б*-повърхност; *в*- обемно тяло

За равномерно заредена повърхност ($\sigma = \text{const}$) с еднаква повърхностна плътност на зарядите във всички точки от повърхността

$$\sigma = \frac{q}{S} \text{ и } q = \sigma S . \qquad (3.6)$$

3. *Обемно заредено тяло* (фиг.3.2,*в*). Разпределението на електрическия заряд по обем V на тялото може да се охарактеризира, задавайки във всяка точка M вътре в телата на обемната плътност на електрическия заряд

$$\rho(M) = \frac{\Delta q}{\Delta V} . \qquad (3.7)$$

От тук определяме $\Delta q = \rho(M)\Delta V$.

Сумираме по целия обем и определяме заряда на това тяло:

$$q = \sum \rho(M)\Delta V . \qquad (3.8)$$

За равномерно заредени тела, ако $\rho = \text{const}$, от (3.7) и (3.8) следва, че

$$\rho = \frac{q}{V} \text{ и } q = \rho V . \qquad (3.9).$$

3.2. Закон на Кулон

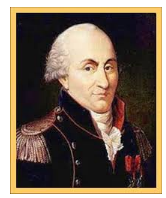
Началото на количественото изучаване на електромагнитните взаимодействия датира към края на XVIII в. през 1785 г. френския физик Шарл Кулон експериментално открива основния закон на електростатиката – закона за взаимодействие между два неподвижни точкови заредени тела или частици. Само за точкови заряди понятието разстояние между зарядите има определен смисъл.

Точкови заредени тела в природата няма. Но ако разстоянието между телата е много по-голямо отколкото техните размери, то нито формата, нито размерите на заредените тела съществено, както показва опита, не влияят на взаимодействието между тях. В този случай телата могат да се разглеждат като точкови. Закона за всеобщото притегляне също е формулиран за точкови тела.

Закона за взаимодействие на неподвижни електрически заряди – закон на Кулон – е основен (фундаментален) физически закон и може да бъде установен само по опитен път. Този закон не произтича от никакви други природни закони.

Откриването на закона за взаимодействие на електричиски заряди е било облекчено от това, че тези сили се оказали големи. Поради това не е било необходима особено чувствителна апаратура. С помощта на достатъчно елементарен прибор – тосионни везни е установено как взаимодействат помежду си малки заредени топчета.

Торсионните везни на Кулон (фиг.3.3) се състоят от стъклен съд и стъклена кобилица, окачена на тънка



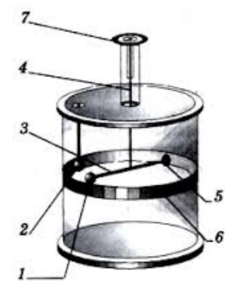
Charles Augustin de Coulumb (1736-1806)

Шарл Огюстен дьо Кулон (1736-1806) е френски физик, офицер и военен инженер, един от създателите на електростатиката. Той за първи път описва математически закона за взаимо-действието между електричните заряди (Закон на Кулон). Член е на Парижката академия на науките. През 1761 г. завършва медицина в Колежа на четирите нации в Париж. Следващите 20 години военният му дълг го изпраща на различни места по света. Прави интересни и важни изследвания в областта на триенето при машините. Написва 25 статии ня теми от електричество, магнетизъм, триене и усукване. Единицата за електрически заряд ***кулон*** носи неговото име.
Умира на 25 август 1806 г. Името му е включено в списъка на великите учени на Франция, разположен на първия етаж на Айфеловата кула

еластична нишка *4* .

На единия край на кобилицата е закрепено дървено позлатено топче *1*, а на другия край – противотежест *5*. Още едно топче *2* е закрепено на капака на везните неподвижно.

Въртящ се прът *7*, на който е закрепена нишката *4* с кобилицата *3*, привеждат топчета *1* и *2* в съприкосновение. След това се изважда топче *2*, зарежда се и отново го спускат до съприкосновение с топче *1*. Част от заряда преминава от топче 2 на топче 1 и те се отблъскват. При това нишката *4* се завърта на някакъв ъгъл, който се отчита по долната скала *6* (фиг.3.3).



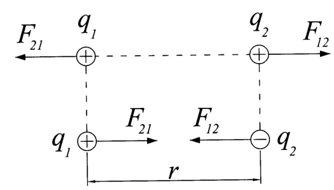
Фиг.3.3. Торсионни везни

Законът на Кулон гласи: *силата на взаимодействието F между два точкови заряда q_1 и q_2 е пропорционална на произведението на тези заряди и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието r между тях:*

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (3.10)$$

Тук k е коефициент на пропорционалност $(k > 0)$.

Силите на взаимодействие (фиг.3.4) са означени както следва: F_{12} - силата с която първия заряд q_1 действа на втория q_2; F_{21}- силата с която втория заряд q_2 действа на първия q_1. Тези сили са насочени по правата, която съединява двата заряда, т.е. те са *централни сили*.



Фиг.3.4. Към закона на Кулон

При взаимодействието на едноименни заряди кулоновата сила е сила на отблъскване, а при разноименни заряди тя е сила на привличане.

Коефициента на пропорционалност k в закона на Кулон (3.10) зависи от избора на единиците на зарядите. В SI коефициентът на пропорционалност k се изразява чрез електрическата константа $\varepsilon_0 = 8{,}858.10^{-12}$ F/m, при което

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9. \qquad (3.11)$$

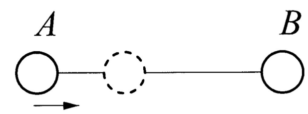
Точността на опитите на Кулон не е била голяма. Само общите съображение, основани на аналогията със силите на гравитацията, давали увереност в абсолютната правилност на този закон. Проверката на закона и границите на неговата приложимост е занимавало дълго време учените.

Първата експериментална проверка на закона е направена през 1772 г. от английския учен Хенри Кавендиш (*Henry Cavendish, 1731-1810*) 13 години преди откриването му от Кулон. Само, че той не публикувал своята работа и така загубил приоритета на откритие. Ръкописа, съдържащ описанието на неговите опити, била открита в архив около 60-те години на XIX в. Метода на Кавендиш се е използвал много и в последно време позволил да се провели закона на Кулон с голяма точност.

3.3. Електрично поле

След продължителна борба теорията за близкодействието спечелва окончателна победа. Решителен поврат в представянето на близкодействието е започнат от великия английски учен Майкъл Фарадей и окончателно завършен от Джеймс Максуел.

Съгласно теорията за действие на растояние един заряд непосредствено „усеща“ присъствието на друг. При преместване на един от зарядите, например A (фиг.3.5), силата действаща на другия заряд – B, мигновено променя своята стойност. При това нито със самия заряд B, нито с пространството около него не са станали никакви промени.



Фиг.3.5. Взаимодействие на заряди

Съгласно идеите на Фарадей *електричните заряди не действат един на друг непосредствено. Всеки от тях създава в заобикалящото го пространство електрична поле*. Полето на единия заряд действа на другия заряд и обратно. При отдалечаване от заряда полето отслабва.

Първоначално тази идея е изразявала само увереността на Фарадей в това, че действието на едно тяло на друго през пустота е невъзможно.

Доказателства за съществуване на поле не е имало. Такива доказателства не трябва да се получат и при изследване само на вазимодействието на неподвижни заряди. Успеха в теорията за близкодействието дошъл след изучаване на електромагнитните взаимодействия на движещи се заредени частици. Отначало е доказано съществуването на променливо във времето поле, а след това е направен извод за реалността на електричното поле на неподвижни заряди.

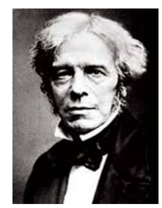
Скорост на електромагнитните взаимодействия. Базирайки се на идеите на Фарадей, Максуел успял теоретично да докаже, че електромагнитните взаимодействия се разпространяват в пространството с *крайна скорост*.

Това означава, че ако малко придвижим заряд A (вж. фиг.3.5), то силата, действаща на заряд B, ще се промени, но не мигновено, а след определено време:

$$t = \frac{AB}{c}, \tag{3.12}$$

където AB е разстоянието между зарядите, а c е скоростта на разпространение на електромагнитните взаимодействия. Максуел установил че тази скорост е равна на скоростта на светлината във вакуум, т.е. $300\ 000\ \mathrm{km/s}$. При преместване на заряд A електричното поле около заряд B ще се измени след време t. Значи, действително между заряди във вакуум протича определен процес, в резултат на който взаимодействието между тях се разпространява с крайна скорост.

Съществуването на определен процес в пространството между взаимодействащи тела,



Michael Faraday
(1791-1867)

Майкъл Фарадей е велик английски учен, създател на общото учение за електромагнитните явления, в което всички явления се разглеждат от единна гледна точка. Фарадей пръв въвежда представите за електрическото и магнитно полета. „ Там, където математиците видяли центовете на напрежение на силите на далекодействието, Фарадей видял междинен агент. Където те не са видяли нищо, освен разстояния, задоволявайки се с това, че са намерлили закон за разпределение на силите, действащи на електрическите флуиди (т.е. заряди от съвременна гледна точка), Фарадей е търсил същността на реални явления, протичащи в средата“ (Дж. Максуел).

продължаващо крайно време, - това е главното, което отличава теорията за близкодействието от теорията за действие на разстояние. Всички други аргументи в полза на едната или друга теория не могат да се приемат за определящи. Разбира се експеримент по проверка на равенството (3.12) е трудно осъществим заради голямата стойност на скоростта. Но сега, след като е изобратено радиото, това не е необходимо.

Радиовълни. Предаването на информация с помощта на електромагнитни вълни се нарича радиовръзка. Сега информацията достига до потребителя за много малко време. Излъчващата станция може да бъде унищожена, но радиовълните , които е излъчила още дълго време може да блуждаят в пространството. По този начин електромагнитното поле се представя като неща реално съществуващо.

Електрическо поле. Електрическото поле съществува реално. Неговите свойства можем да изследваме по опитен път. Към настоящия момент за електрическото поле можем да кажем:

Първо, електрическото поле е материално: то съществува независимо от нас, от нашите знания за него;

Второ, полето притежава определени свойства, които не позволяват то да се сбърка с нещо друго.

Главно свойство на електрическото поле е неговото действие на електричните заряди с определна сила. По действието върху заряд се установява съществуването на поле, неговото разпределение в пространството и се изучават всички негови характеристики.

Електрическото поле на неподвижни заряди се нарича ***електростатическо***. То не се променя с времето. Електростатичното поле се създава само от електрически заряди. То съществува в пространството около тези заряди и е непрекъснато свързано с тях.

Въз основа на горните разсъждения за електричното поле може да се каже следното:

1. *Съгласно теорията за близкодействието взаимодействието между заредените частици се осъществява посредством електрическо поле.*
2. *Електрическото поле – това е особена форма на материята, съществуваща независимо от нашите представи за него.*

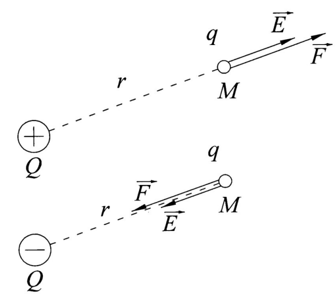
Доказателство за реалността на електрическото поле – това е крайната скорост на разпространение на електромагнитните взаимодействия.

3.4. Интензитет на електрическото поле. Линии на интензитета

Интензитет на електрическото поле. Електрическото поле може да се възбужда от заредени тела или частици. Ако създаващото полето тяло е неподвижно имаме *електростатическо поле*. Електрическото поле може да има и друг произход. Например то може да бъде предизвикано под влиянието на магнитно поле при определени условия. Тогава то се нарича *индуктирано електрическо поле*.

Всяко електрическо поле се проявява чрез електрическата (механическата) сила $\vec{F}$, с която то действа върху намиращ се в това поле неподвижен електрически заряд.

Нека точковият заряд Q се намира в дадена точка от пространството и създава около себе си електростатично поле (фиг.3.6).



Фиг.3.6. Схема към електрическия интензитет

Силовото действие на електрическото поле може да се изследва с помощта на пробно заредено тяло. В точка $M(x,y,z)$ на полето внасяме положителен пробен точков заряд q. Разстоянието между двата заряда означаваме с r. В съответствие с това, че електростатичното поле непрекъснато разпределено в пространството, във всяка точка на пространството и във всеки момент от времето пробния точков заряд ще изпитва напълно определена по стойност и посока механическа (кулонова) сила.

Експериментално се установява, че електрическата сила $\vec{F}$ с която изследвано електрическо поле действа върху пробния заряд q зависи от големината на този заряд. Величините $\vec{F}$ и q са пропорционални помежду си. Това позволява да се въведе вектор $\vec{E}$ на електрическото поле, дефиниран с отношението $\vec{F}/q$ което има качеството на специфична (за единица от пробния заряд) електрическа сила. Този вектор характеризира изследваното поле в мястото, където се намира пробното тяло.

Ползвайки се от това, може да се определи основната физическа величина, характеризираща електростатичното поле във всяка една точка, която се нарича *интензитет на електрическото поле*.

Интензитета на електрическото поле се означава с вектор $\vec{E}$, съвпадащ по направление и посока с вектора $\vec{F}$ на механическата сила, действаща на положително заредено пробно тяло. Интензитетът в дадена точка е удобно да се определи с големината на силата, която се пада на единица положителен заряд на пробното тяло, разположено в същата точка на полето, т.е. с отношението

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \tag{3.13}$$

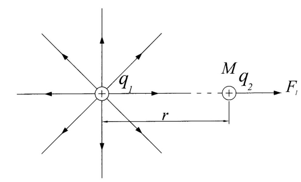
Интензитет на електрическото поле

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Интензитета на електрическото поле е векторна величина, характеризираща електрическото поле и определяща силата, действаща на заредена частица от страна на електрическото поле.

Мерната единица за интензитет е нютон за кулон $\left[\vec{E}\right] = \mathrm{N/C}$.

Разглеждаме електрическо поле на точково заредено тяло (точков заряд). Възбудител на полето е точков заряд Q (фиг.3.7). Той действа на поставения в точка M точков заряд q с кулонова сила F :



Фиг.3.7. Електрично поле на точков заряд

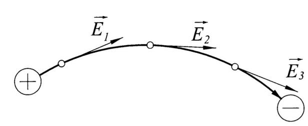
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}. \tag{3.14}$$

Интензитета на полето на заряда Q в точка M може да се изрази с формулата

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{3.15}$$

Израза в знаменателя $4\pi r^2$ представлява лице на сферична повърхнина преминаваща през точка M и с център в точката в която е разположен заряда Q. Направлението на вектора интензитет на полето в точка M съвпада с направлението на правата, преминаваща през точковия заряд Q и точка M .

Очевидно, че във всички точки, отдалечени от точковия заряд Q на едно и също разстояние r, т.е. разположени на сферичната повърхност с радиус r, големината (но не и посоката) на интензитета на полето е еднаква, а линиите на интензитета на електрическото поле на точков заряд Q са насочени радиално фиг.3.7. Посоката на интензитета $\vec{E}$ зависи от вида на електричния заряд Q. Ако $Q > 0$, векторът $\vec{E}$ е насочен по радиуса, който излиза от заряда; ако $Q < 0$, интензитетът е насочен по радиуса, който влиза в заряда.

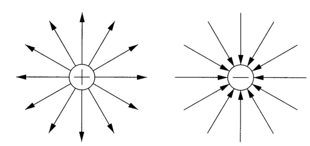


Фиг.3.8. Линия на интензитета **E**

Линии на интензитета. Електростатичното поле може да се охарактеризира със съвкупност от силови и еквипотенциални линии.

Графичното изобразяване на електростатичното поле с помощта на вектори на интензитета $\vec{E}$ в различни точки на полето е много неудобно. Векторите на интензитета при това ще се наложат един върху друг, и ще се получи много нечетлива картина. Най-нагледен метод, предложен от М. Фарадей е изобразяване на електростатичното поле с помощта на ***силови линии*** (***линии на интензитета***). ***Силова линия*** е мислено прекарана в полето крива, допирателните към която във всяка точка съвпадат с направлението на вектора интензитет на полето (фиг.3.8). Силовите линии имат посоката на вектора на интезитета. Например, на фиг.3.8 силовата линия лежи в равнината на чертежа и е насочена на ляво на дясно. Линиите на интензитета не се пресичат, тъй като във всяка точка на полето вектора $\vec{E}$ има само едно направление.

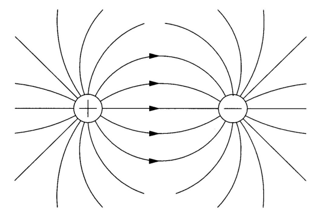
Силовите линии имат начало (в положително заредено тяло) и край (в отрицателно заредено тяло). Тъй като положителните и отрицателни заряди, създаващи поле, не могат да се намират в една и съща точка, то силовите линии на електрическото поле не могат да се затварят сами в себе си.



Фиг.3.9. Посока електрическия интензитет според знака на

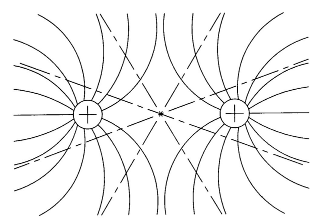
Посоката на $\vec{E}$ може да се определи, като се вземе под внимание, че едноименните заряди се отблъскват, а разноименните се привличат помежду си. Така се установява, че линиите на интензитета са излизащи от положителен заряд и влизащи към отрицателен заряд (фиг.3.9).

Според Фарадеевите представи електрическите силови линии се дефинират като опънати еластични нишки със следните свойства: 1) тези нишки са прекъснати и техните краища свързват разноименно заредени тела, 2) посоката им е от тялото с положителен заряд към тялото с отрицателен заряд и 3) те се отблъскват при еднопосочност и се привличат при противопосочност помежду си. Така описаните нишки не са реални. Те могат да служат като условни понятия за нагледно обяснение на някои класически явления, например привличане на разноименно заредени тела (фиг.3.10) и отблъскване на тела с едноименни заряди.



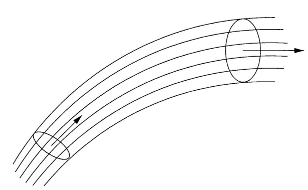
Фиг.3.10. Силови линии при разноименни заряди

При едноименни заряди (фиг.3.11) силовите линии са изкривени. Далеч от зарядите тези линии асимптотически се приближават към прави, прекарани от точка по средата на двата заряда. От тези фигури се потвърждава изводът, че силовите линии излизат (изхождат) от положително наелектризираните тела и влизат (се схождат) в отрицателно наелектризираните.



Фиг.3.11. Силови линии при едноименни заряди

Съвкупвост от линиите на интензитета $\vec{E}$, които се опират във всички точки на затворен контур, ограничаващ известна повърхнина, отделят област от електрическото поле, която се нарича тръба на електрическия интензитет (фиг.3.12).



Фиг.3.12. Тръба на електрическия интензитет

3.5. Принцип на суперпозицията за електрически полета

Принцип на суперпозицията. Експериментално е установено следното свойство на електрическото взаимодействие между заредени тела: действието на един електричен заряд върху друг не зависи от наличието на други заряди. Затова силата, с която система електрически заряди действа на някой пробен заряд, е равна на векторната сума на силите, с които на пробния заряд действа от системата поотделно. С термини от теорията на електростатичното поле това означава, че резултантната интензивност на полето $\vec{E}$, създавано от система от N заряди, може да се определи чрез векторно събиране на интензивностите $\vec{E_i}$ на полетата, създавани в дадената точка на пространството от всеки $i-$ти заряд:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + ... + \vec{E_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E_i} . \qquad (3.16)$$

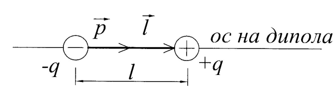
Това твърдение се нарича принцип на наслагване или *принцип на суперпозиция* на електрични полета.

Дипол в електрично поле. В качеството на пример за използване принципа на суперпозицията, ще разгледаме два разноименни заряда разположени близо един до друг. Такава система от два еднакви по големина точкови заряди $+q$ и $-q$ се нарича *електрически дипол*. При описание на електростатичното поле на дипола ще считаме, че разстоянието l между зарядите на дипола е значително по-малко от от разстоянието r от дипола до точка M от пространството, където се разглежда полето на дипола. Трябва да отбележим, че електрическия дипол широко се използва при описание на електричните свойства на отделните молекули на веществата.

Нека вектора $\vec{l}$ е насочен от отрицателния заряд на дипола към положителния заряд, а неговия модул е равен на разстоянието l между зарядите. Дипола се характеризира с *електрически диполен момент*

$$\vec{p} = q\vec{l} . \qquad (3.17)$$

Тази характеристика определя разположението на дипола в пространството, тъй като направлението на вектора $\vec{p}$ съвпада с направлението на оста на дипола в пространството (фиг.1.13).



Фиг.3.13. Електрически момент на дипола

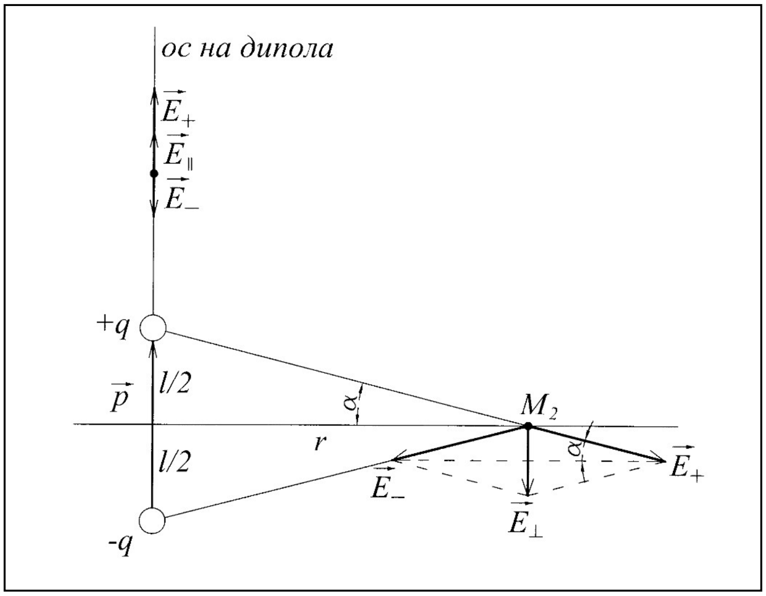
В произволна точка на пространството M по принципа на суперпозицията

$$\vec{E} = \vec{E_+} + \vec{E_-} , \qquad (3.18)$$

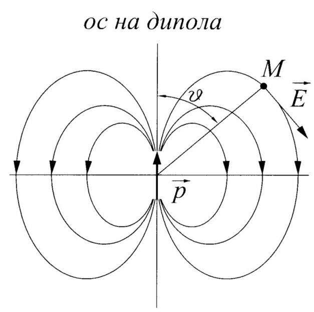
където $\vec{E_+}, \vec{E_-}$ са вектори на интезитета на полето, създавани в точка M съответно от положителните и отрицателните заряди на дипола.

За произволна точка M_1 върху оста на дипола (фиг.3.14), намираща се на разстояние r от центъра на дипола, векторите на интензитета $\vec{E_+}, \vec{E_-}$ са насочени по осите на дипола в противоположни страни. Вектора на резултантната на интензитета $\vec{E_{||}}$ по посока съвпада с посоката на вектора $\vec{p}$, а неговия модул след редица от изчисление е

$$\vec{E_{||}} \approx \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} . \qquad (3.19)$$



Фиг.3.14. Към изчисляване на интензитета на електростатическото поле на дипола



Фиг.3.15. Силови линии на полето на електрически дипол

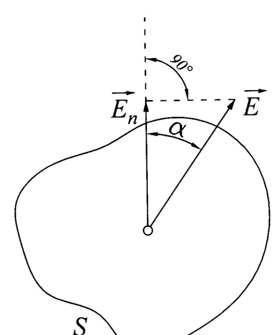
За произволна точка M_2 на права, перпендикулярна на оста на дипола (вж. фиг.3.14) и намираща се на разстояние r от центъра на дипола

$$\overrightarrow{E_+} = \overrightarrow{E_-} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,. \tag{3.20}$$

Сумарния заряд на полето на дипола с куба на разстоянието r. На фиг.3.15 са показани силовите линии на електрическото поле на дипола.

3.6. Теорема на Гаус за електростатическо поле

Поток на вектора електрически интензитет. Ще въведем важно за теорията на електрическото поле понятие поток на вектора интензитет през дадена повърхност. Вектора електрически интензитет $\vec{E}$ характеризира електричното поле във всяка точка на пространството. Може да се въведе още една величина, зависеща от стойностите на вектора $\vec{E}$ не в една точка, а във всички точки на повърхността, ограничена от плосък затворен контур. Казано с други думи става въпрос за величина, която се явява характеристика за количеството линии на електричното поле, които пронизват даден контур.



Фиг.3.16. Нормална компонента на вектора интензитет на електричното поле

Да разгледаме плосък затворен проводник (контур), ограничаващ повърхност с площ S от пространството и поставен в равномерно електростатично поле (фиг.3.16). Нормалата $\vec{n}$ (вектор, чийто модул е равен на единица) на равнината на контура сключва ъгъл α с направлението на вектора $\vec{E}$.

Електричен поток Φ_E *(поток на вектора на електрическия интензитет)* през повърхността с площ S, се нарича величината, равна на произведението от модула на вектора електрически интензитет $\vec{E}$, площта S и косинуса на ъгъла α между векторите $\vec{E}$ и $\vec{n}$:

$$\Phi_E = BS\cos\alpha . \qquad (3.21)$$

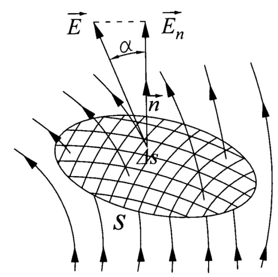
Произведението $E\cos\alpha = E_n$ представлява проекция на вектора електрически интензитет върху нормалата $\vec{n}$ на равнината на контура. Така

$$\Phi_E = E_n S . \qquad (3.22)$$

Потока на интензитета е толкова по-голям, колкото са по-големи величините E_n и S.

В общия случай при изчисляване на потока на интензитета през произволна повърхност в нееднородно поле, повърхността следва да се раздели на безкрайно малки плоски елементи с площ ΔS (фиг.3.17). В границите на всяка от елементарните площадки електрическия интензитет може да се счита за еднакъв. Така през отделна елементарна площадка ще имаме елементарен поток

$$\Delta\Phi = E_n \Delta S . \qquad (3.23)$$



Фиг.3.17. Поток на интензитета през елементарна площ

Потока на интензитета през произволна повърхност се намира чрез сумиране на елементарните потоци:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} E_n \Delta S_i . \qquad (3.24)$$

Електрическия интензитет се явява плътност на потока на интензитета в дадена точка на полето. Това е общият израз за определяне на потока на интензитета при еднородно електрично поле.

Единица мярка за потока на вектора електрически интензитет е волт по метър:

$$\left[\Phi_E\right] = \left[E_n \cdot S\right] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{V} \cdot \mathrm{m} .$$

Векторен поток на интензитета 1V.m се създава от равномерно електростатично поле с интензитет 1V/m през повърхност 1 m^2, разположена перпендикулярно на вектора електрически интензитет.

Теорема на Гаус. В работата по теория на звука от 1762 г. Лагранж разглежда частен случай на теоремата. Тя била формулирана от Карл Фридрих Гаус (1813, 1830) във вид на обща математическа теорема с пример на задача от електродинамиката. От 1826 г. до 1834 г. М.В. Остроградский извежда формулата в общ вид, представяйки я във вид на теорема (1831).

Формулата като правило се нарича „теорема за дивергенцията“ (англ. *divergence theorem*), понякога – формула на Гаус или формула (теорема) на Гаус-Остроградский.

Изчисляването на електрическо поле в много случаи се опростява значително с прилагането на тази важна теорема, дадена по-долу.

Изчисляваме потока на вектора $\vec{E}$ през произволна затворена повърхност S, обхващаща точков заряд q (фиг.3.18). затваряме заряда q със сфера S_1. Центъра на сферата съвпада с центъра на заряда. Радиуса на сферата S_1 е равен на R_1.

Във всяка точка от повърхността S_1 проекцията на $\vec{E}$ по направление на външната нормала е еднаква и равна на

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$

Тогава потока през S_1

$$\Phi_E = E_n S_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Да изчислим потока през сфера S_2, имаща радиус R_2:

$$\Phi_E = E_n S_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

От непрекъснатостта на линиите $\vec{E}$ следва, че потока и през всяка произволна повърхност S ще бъде равен на същата величина:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} E_n \Delta S_i = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.25)$$

Израза (3.25) е известен като *теорема на Гаус за един заряд*.

Получения резултат е верен не само за един заряд, но и за всеки брой произволно разположени заряди, намиращи се вътре в повърхността:

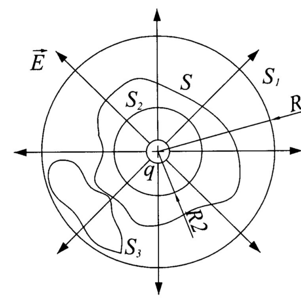
$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} E_n \Delta S_i = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.26)$$

Израза (3.26) е известен като теорема на Гаус за няколко заряда.

Потока на вектора интензитет на електрическото поле през затворена повърхност във вакуум е равен на алгебричната сума от всички заряди, разположени вътре в повърхността, разделена на ε_0.

При изчисляване на потока през затворена повърхност вектора на нормалата $\vec{n}$ следва да се счита насочен навън. Линиите $\vec{E}$, излизащи от обема, ограничен от дадената повърхност, *създават положителен поток*, докато линиите влизащи в обема – *отрицателен поток*.

Ако между горните сфери разположим още една повърхност S_3, необхващаща заряда, то както се вижда от



Фиг.3.18. Към извода на теоремата на Гаус-Остроградский

Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Карл Фридрих Гаус е германски математик и физик със значителен принос в математиката, електростатика, геодезия, астрономия и оптика. Наричан е „принц на математиците“, а самия той определя математиката като „царица на науките“

От 1792 г. до 1798 г. посещава два университета. След смъртта на първата му съпруга се жени втори път за нейна приятелка от която има двама сина и дъщеря.

През 1807 г. Гаус става професор в Гьотингенския университет и директор на местната астрономическа обсерватория , и като такъв работи до края на дните си. През 1838 г. получава Медал-Копли, най-висока и престижна награда на Лондонското кралско общество. През 1845 г. става таен дворцов съветник, а през 46 – за трети път декан на философския факултет. Умира през 1855 г. в дома си.

фиг.3.18, всяка линия на интензитета $\vec{E}$ ще пресича два пъти тази повърхност: един път от положителната страна – влиза в повърхността S_3, друг път – от отрицателната страна – излиза от повърхността S_3. В резултат алгебричната сума на линиите на интензитета, преминаващи през затворената повърхност S_3, ще бъде равна на нула, т.е. *пълния поток, преминаващ през* S_3, ще бъде равен на нула.

По такъв начин, за точков заряд q *пълния поток през произволна затворена повърхност* S *ще бъде равен на*:

$\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, *ако заряда е разположен вътре в затворената повърхност*;

$\Phi_E = 0$, *ако заряда е разположеен извън затворена повърхност*.

Този резултат не зависи от формата на повърхността, и знака на потока съвпада със знака на заряда.

В общия случай електрическите заряди могат да бъдат разпределени с някаква обемна плътност $\rho = \Delta q / \Delta V$, различна в различните места на пространството. Тук ΔV е физически безкрайно малък обем, който трябва да се разбира в следния смисъл: *това е такъв обем, който от една страна е достатъчно малък, че в неговите граници плътността на заряда се приема за еднаква, а от друга страна – доостатъчно голям, за да не може да се прояви дискретността на заряда*, т.е. това, че всеки заряд е кратен на цяло число елементарни заряди на електрона.

Сумарния заряд в обем ΔV ще бъде равен на

$$\sum q_i = \sum_V \rho \Delta V \,. \tag{3.27}$$

Тогава от теоремата на Гаус (3.26) може да се получи

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} E_n \Delta S_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_V \rho \Delta V \,, \tag{3.28}$$

- *това е още една форма на запис на теоремата на Гаус-Остроградский, ако заряда е разпределен неравномерно по обема.*

Да разгледаме някои прости примери за изчисляване на електрическо поле с помощта на теоремата на Гаус.

Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861)

Михаил Остроградский е роден през 1801 г. в Полтавска област. Основното си образование получава в полтавската гимназия. Завършва математическия факултет на Харковския университет. След това посещава лекции в Сорбоната в Париж и в Колежа на Франция. През 1823 г. е поканен като професор в колежа на Хенри IV. Работи главно в теорията на определените интеграли.

През 1828 г. се завръща у дома с френска диплома и заслужена репутация на талантлив учен. Първоначално преподава в Главното Инженерно училище на Руската империя и в Института по пътища и съобщения.

През 1830 г. е избран за извънреден академик на Петербургската академия на науките. За големи научни заслуги е избран за член-кореспондент на Париж-ката Академия на науките, член на Американската, Римската и други академии и научни дружества. Почетен член е на Московския университет (1844). Умира през 1861 г. и съгласно завещанието е бил погребан в родното село.

3.7. Изчисляване на електрични полета с помощта на теоремата на Гаус

Използвайки теоремата на Гаус, може да се изчисли интензитета на електростатически полета на заредени тела в случаите, когато тези полета притежават пространствена симетрия (преди всичко плоска, цилиндрична или сферична). В такива задачи с отчитане на симетрията може да се определи направлението на силовите линии на полето и да се избере затворена повърхност S за прилагане теоремата на Гаус по такъв начин, че силовите линии на полето да са или перпендикулярни , или успоредни на отделните части на такава затворена повърхност. Това опростява изчисляването на интензитета на електростатическото поле в различни точки на пространството с помощта на теоремата на Гаус.

Ще разгледаме няколко примера за такива изчисления на електростатически полета във вакуум без отчитане влиянието на веществата, от които се състоят заредените тела.

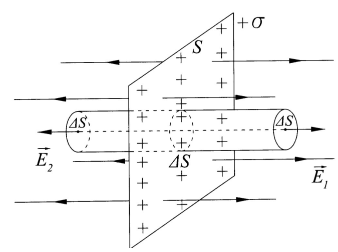
***Поле на равномерно заредена плоскост*.**

Повърхностната плътност на заряда на произволна равнина с площ S се определя по формулата

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

където Δq е заряда съсредоточен на площ ΔS; ΔS е физически безкрайно малък участък от равнината.

Нека σ във всички точки на равнината S е еднаква. Заряда q е положителен. Интензитета $\vec{E}$ във всички точки ще има направление перпендикулярно на равнината S (фиг.3.19).



Фиг.3.19. Електростатично поле на заредена безкрайна равнина

Очевидно, че в симетрични спрямо равнината точки интензитета $\vec{E}$ е еднакъв по стойност и противоположен по посока.

Представяме си мислено цилиндрична повърхност с образувателни, перпендикулярни на плоскостта и основи с големина ΔS, разположени спрямо плоскостта симетрично. По силата на симетрията $E_1 = E_2 = E$.

Прилагаме теоремата на Гаус. Потока Φ_E през страничната повърхност на цилиндъра е равен на нула, тъй като $E_n = 0$. За основите на цилиндъра $E_n = E$.

Сумарния поток през затворената повърхност (цилиндъра) е

$$\Phi_E = 2E\Delta S, \tag{3.29}$$

Вътре в повърхността е затворен заряд $q = \sigma\Delta S$. Следователно от теоремата на Гаус-Остроградский ще получим

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = 2\Delta S E = \sigma\Delta S \frac{1}{\varepsilon_0}. \tag{3.30}$$

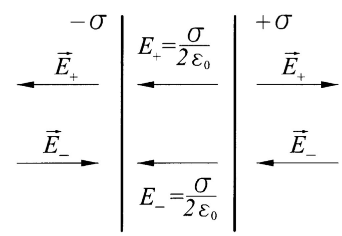
откъдето е видно, че интензитета на полето на равнината S е равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.31}$$

Получения резултат не зависи от дължината на цилиндъра, а само от повърхностната плътност на електричните заряди. Във всички точки около заредената равнина интензитетът е един и същ $E = \text{const}$.

Поле на две равномерно заредени равнини.

Разглеждаме електростатичното поле, създадено от две безкрайни успоредни равнни, равномерно и непрекъснато заредени с повърхностна плътност σ. Картината на разположението на силовите линии е показана на фиг.3.20. Вътре между равнините линиите на полето са насочени от положително заредената равнина към отрицателно заредената. Резултантното поле се намира като суперпозиция на полетата създавани от всяка равнина.

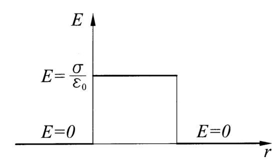


Фиг.3.20. Две равномерно заредени равнини

В областта между двете равнини интензитетите на двете полета са в една посока и интензитетът на сумарното поле ще бъде

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{3.32}$$

Извън равнините интензитетите на двете полета са в противни посоки и резултантния интензитет е равен на нула $\vec{E} = 0$. Интензитетът на полето между двете равнини се удвоява, а извън тях се оказва равен на нула (фиг.3.21). Във всички кондензатори се използва елетростатично поле, създадено от две равномерно и непрекъснато заредени с разноименни заряди пластинки, поставени близо една до друга.



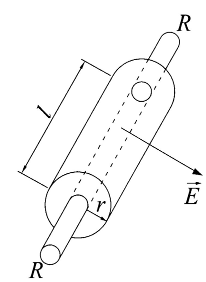
Фиг.3.21. Поле на две равномерно заредени равнини

Поле на равномерно зареден безкрайно дълъг цилиндър.

Нека полето се създава от безкрайна цилиндрична повърхност с радиус R, заредена с постоянна линейна плътност $\lambda^+ = \dfrac{\Delta q}{\Delta l}$, където Δq е заряда, съсредоточен на участък от цилиндъра (фиг.3.22).

От съображения за симетрия следва, че E във всяка точка е насочена по радиуса, перпендикулярно на оста на цилиндъра.

Приемаме, че около цилиндъра (проводника) прекарваме затворена коаксиална повърхност (цилиндър в цилиндър) с радиус r и дължина l. За основата на цилиндъра $E_n = 0$, за страничната повърхност $E_n = E(r)$, т.е. зависи от разстоянието r.



Фиг.3.22. Зареден безкрайно дълъг цилиндър (проводник)

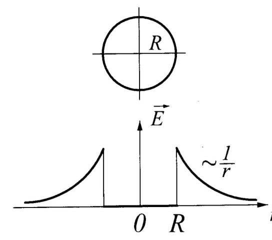
Следователно, потока на вектора $\vec{E}$ през разглежданата повърхност е равен на $\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi rl$.

При $r \geq R$ повърхносттаще има заряд $q = \lambda l$. По теоремата на Гаус-Остроградский $\Phi_E = E(r)4\pi rl = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$. От тука ***полето извън сферата***

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.33)$$

При $r < R$, полето ще бъде равно на нула, т.е. там няма заряди: $E(r) = 0$ (фиг.3.23).

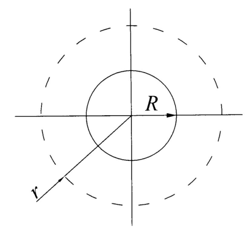
Ако се намалява радиуса на цилиндъра R (при $\lambda = \text{const}$), то може близа да повърхността да се получи поле с много голяма интензитет и, при $R \to 0$, да се получи проводник.



Фиг.3.23. Поле на зареден безкрайно дълъг цилиндър (проводник)

Поле на разномерно заредена сферична повърхност.

Сфера с радиус R е заредена с положителен заряд с повърхностна плътност σ. Полето в дадения случай ще бъде централно-симетрично, интензитета $\vec{E}$ във всяка точка минава през центъра на сферата; $E = E(r)$ и силовите линии са перпендикулярни на повърхността във всяка точка. Прекарваме върху тази сфера нова сфера с радиус r (фиг.3.24).



Фиг.3.24. Заредена сферична повърхност

Ако $r \geq R$, то вътре във новата сфера попада целия заряд q, разпределен по сферата и тогава

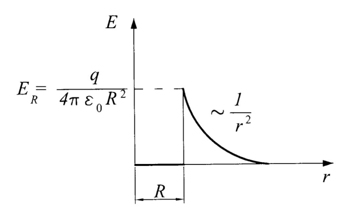
$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

От тука *полето извън сферата*

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (3.34)$$

Вътре в сферата, при $r < R$, полето ще бъде равно на нула, т.е. там няма заряди: $E(r) = 0$ (фиг.3.25).

Полето извън сферата е равно на полето на точков заряд със същата големина, поставен в центъра на сферата.



Фиг.3.25. Поле на заредена сферична повърхност